

# Matematyka

## Zadanie 1.

Oblicz 24% liczby  $\left(-3\frac{1}{2}\right)^2 : 2\frac{1}{2} - \left(\sqrt{1,44} - \sqrt{1\frac{7}{9}}\right) : \left(\frac{1}{5} - 1\right)$

## Zadanie 2.

Oblicz  $\frac{8^5 \cdot 3^7}{6^6 \cdot 4^5}$

## Zadanie 3.

Wykaż, że liczba  $6^{13} + 6^{14} + 6^{15}$  jest podzielna przez 43.

## Zadanie 4.

Wykaż, że liczba  $2^{30} + 2^{20}$  jest podzielna przez 5.

## Zadanie 5.

Uzasadnij, że prawdziwa jest równość  $(-1)^n + (-1)^{n+1} = 0$ , gdzie  $n$  jest liczbą naturalną.

## Zadanie 6.

Oblicz wartość wyrażenia  $(\sqrt{150} + \sqrt{54} - 3\sqrt{24}) : 2\sqrt{2}$

## Zadanie 7.

Uzasadnij, że a)  $\sqrt{8} + \sqrt{18} = \sqrt{50}$       b)  $(\sqrt[3]{250} + \sqrt[3]{128} - \sqrt[3]{0,016}) : \sqrt[3]{2} = 8,8$

## Zadanie 8.

Która z liczb jest większa:  $a = \frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$  czy  $b = \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ ?

## Zadanie 9.

Oblicz wartość liczbową wyrażenia

$$(4x + y)^2 - (3x - 2y)(3x + 2y) - 8y(x - y) \quad \text{dla } x = -\sqrt{2} \text{ i } y = 2\sqrt{2}$$

## Zadanie 10.

Rozwiąż równanie  $2x - \frac{1}{3}x + \frac{2}{5} = \frac{1}{3}(4 + 5x) - \frac{7}{30}$

## Zadanie 11.

Rozwiąż równanie  $\frac{(2x+1)^2}{(3x-1)^2} = \frac{4}{9} \quad x \neq \frac{1}{3}$

**Zadanie 12.**

Wiedząc, że  $2x + y = 6$  oblicz  $\frac{10x + 5y + 20}{50}$

**Zadanie 13.**

Wykaż, że  $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

**Zadanie 14.**

Uzasadnij, że różnica kwadratów dwóch kolejnych liczb nieparzystych jest podzielna przez 8.

**Zadanie 15.**

Wykaż, że suma trzech kolejnych liczb naturalnych parzystych jest podzielna przez 6.

**Zadanie 16.**

Anita jest o 4 lata starsza od Radka. Za 7 lat Anita i Radek będą mieli razem 32 lata. Ile lat ma obecnie Radek, a ile Anita?

**Zadanie 17.**

Spośród czterech liczb, druga jest 3 razy większa od pierwszej, trzecia o 5 mniejsza od drugiej, a czwarta 4 razy mniejsza od sumy trzech pozostałych. Różnica drugiej i trzeciej liczby jest o 1 większa od różnicy czwartej i pierwszej liczby. Co to za liczby?

**Zadanie 18.**

Znajdź 5 par takich liczb, których różnica równa się  $\frac{1}{5}$  sumy tych liczb.

**Zadanie 19.**

Uczeń miał pomnożyć 56 przez liczbę dwucyfrową, w której cyfra dziesiątek jest trzykrotnie większa od cyfry jedności. Wskutek pomyłki polegającej na przestawieniu cyfr w mnożniku uczeń otrzymał iloczyn o 3024 mniejszy od poprawnego. Jaki jest poprawny iloczyn?

**Zadanie 20.**

W dwóch workach znajduje się piasek. Jeżeli z pierwszego worka przesypimy do drugiego 6 kg piasku, to w obu workach będzie tyle samo piasku. Jeżeli zaś z drugiego worka przesypimy do pierwszego 4 kg, to w pierwszym będzie dwa razy więcej piasku niż w drugim. Ile piasku jest w każdym worku?

**Zadanie 21.**

Oblicz pole równoległoboku o boku  $\sqrt{0,72 \cdot 10^4}$  cm i wysokości opuszczonej na ten bok równej  $\sqrt{0,2 \cdot 10^5}$  cm. Zapisz wynik w notacji wykładniczej.

### **Zadanie 22.**

W równoległoboku ABCD kąt ostry ma  $60^{\circ}$ , a krótsza przekątna tworzy z jednym z boków kąt  $30^{\circ}$ . Krótszy bok tego równoległoboku ma długość  $a$ . Uzasadnij, że obwód  $L$  i pole  $P$  tego równoległoboku określone są wzorami  $L = 6a$  i  $P = a^2\sqrt{3}$ .

### **Zadanie 23.**

Jedna z przekątnych deltoidu ma długość 13 cm i dzieli figurę na dwa trójkąty prostokątne o przyprostokątnych 5 cm i 12 cm. Oblicz długość drugiej przekątnej.

### **Zadanie 24.**

Uzasadnij, że jeżeli czworokąt ABCD jest trapezem równoramiennym, którego podstawy mają długości  $a$  i  $b$  oraz odcinek EC jest jego wysokością to  $|AE| = \frac{a+b}{2}$

### **Zadanie 25.**

W trapezie ABCD połączono środek E ramienia AD z końcami ramienia BC. Uzasadnij, że pole powstałego trójkąta EBC jest równe połowie pola trapezu.

### **Zadanie 26.**

Na bokach AB, BC i AC trójkąta ABC wybrano odpowiednio punkt D, E, F w taki sposób, że  $|AD| = |AF|$ ,  $|BD| = |BE|$  i  $|CE| = |CF|$ . Udowodnij, że  $2\delta + \alpha = 180^{\circ}$ , gdzie  $\delta = |\angle DEF|$ ,  $\alpha = |\angle DAC|$ .

### **Zadanie 27.**

W trójkącie równoramiennym jeden bok ma długość równą 19cm, a drugi 39cm. Który z tych boków jest ramieniem? Odpowiedź uzasadnij.

### **Zadanie 28.**

Dany jest trójkąt prostokątny o bokach długości 5,12 i 13. Jaka długość ma najkrótsza wysokość tego trójkąta?

### **Zadanie 29.**

Wykaż, że przekątna sześcianu o krawędzi  $a$  wyraża się wzorem  $a\sqrt{3}$ .

### **Zadanie 30.**

Sześcian o krawędzi długości 12 cm i graniastosłup prawidłowy czworokątny mają równe objętości. Wysokość graniastosłupa ma 48 cm długości. Oblicz pole powierzchni całkowitej graniastosłupa.

### **Zadanie 31.**

Drewnianą sześcienną kostkę o krawędzi długości 20cm rozcięto na 64 jednakowe kostki sześciennie. Z dwudziestu siedmiu małych kostek ułożono nowy sześcian o krawędzi  $a$ . Czy pole powierzchni całkowitej nowego sześcianu jest równe  $1350 \text{ cm}^2$ .

### **Zadanie 32.**

W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym wszystkie jego wymiary zwiększono 4-krotnie. Uzasadnij, że objętość otrzymanego graniastosłupa zwiększyła się 64 razy.

### **Zadanie 33.**

Ścianami bocznymi graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego są kwadraty o boku  $a$ .

Uzasadnij, że:

a) objętość  $V$  tego graniastosłupa określona jest wzorem  $V = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^3$ ,

b) pole powierzchni całkowitej  $P_c$  tego graniastosłupa określone jest wzorem  $P_c = 3a^2(\sqrt{3} + 2)$ .

### **Zadanie 34.**

Uzasadnij, że jeżeli w ostrosłupie prawidłowym czworokątnym wysokość jest równa połowie przekątnej podstawy, to ściany boczne tego ostrosłupa są przystającymi trójkątami równobocznymi.

### **Zadanie 35.**

Uzasadnij, że jeżeli w ostrosłupie prawidłowym czworokątnym wszystkie krawędzie mają długość  $a$ , to wysokość  $h$  tego ostrosłupa określona jest wzorem  $h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ .

### **Zadanie 36.**

Podstawą graniastosłupa prostego jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych  $5 \text{ cm}$  i  $12 \text{ cm}$ , a największa ściana boczna tego graniastosłupa jest kwadratem. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

### **Zadanie 37.**

Z akwarium o długości  $50 \text{ cm}$  i szerokości  $40 \text{ cm}$  odlano  $3 \text{ l}$  wody. O ile centymetrów obniżył się poziom wody w tym akwarium?

### **Zadanie 38.**

Dwa jednakowe ostrosłupy prawidłowe czworokątne o krawędzi podstawy  $8 \text{ cm}$  połączono podstawami. Odległość między wierzchołkami wynosi  $20 \text{ cm}$ . Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tej bryły.

**Zadanie 39.**

W urnie znajduje się 100 kul białych, czarnych i niebieskich, przy czym kul białych jest trzy razy więcej niż czarnych, a niebieskich jest o 5 mniej niż czarnych. Losujemy jedną kulę. Oblicz, czy prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej jest większe od  $\frac{1}{3}$ .

**Zadanie 40.**

Z 2 kg 12 – procentowego roztworu cukru odparowano 290 g wody, a następnie dosypano 250 g cukru. Jakie stężenie procentowe ma otrzymany w ten sposób roztwór?

**Zadanie 41.**

Uzasadnij, że jeżeli długość boku kwadratu zwiększymy o 10%, to jego pole zwiększy się o 21%.

**Zadanie 42.**

Cenę  $k$  pewnego towaru najpierw podwyższono o 10%, a po pewnym czasie obniżono o 10%. Uzasadnij, że końcowa cena towaru stanowi 99% początkowej ceny tego towaru.

**Zadanie 43.**

Uzasadnij, że jeżeli do garnka wlejesz jedną szklankę octu dziesięcioprocentowego i 4 szklanki wody, to otrzymasz roztwór dwuprocentowy octu.

## Zadania testowe

### Zadanie 1.

Graniastosłup ma 52 wierzchołki. Suma liczby wszystkich jego ścian i liczby krawędzi wynosi:

- a) 106                      b) 104                      c) 78                      d) 156

### Zadanie 2.

Ojciec ma 41 lat, starszy syn – 13 lat, córka – 10 lat, a najmłodszy syn – 6 lat. Za ile lat ojciec będzie miał tyle lat, ile wszystkie jego dzieci razem?

- a) za 5 lat                      b) za 6 lat                      c) za 7 lat                      d) to jest niemożliwe

### Zadanie 3.

Jakim procentem liczby 375 jest suma cyfr tej liczby?

- a) 0,04%                      b) 4%                      c) 2500%                      d) 25%

### Zadanie 4.

Stosunek miar kątów trójkąta jest równy 1 : 5 : 6. Zatem jest to trójkąt:

- a) prostokątny                      b) równoboczny                      c) rozwartokątny                      d) równoramienny

### Zadanie 5.

Mamy do dyspozycji 6 odcinków o długościach: 1, 2, 3, 2001, 2002, 2003. Na ile sposobów można wybrać spośród nich takie trzy, które będą bokami trójkąta?

- a) 3                      b) 5                      c) 6                      d) 10

### Zadanie 6.

Skarbu pilnują cztery smoki. Każdy z nich ma 3 głowy, a w każdej głowie po 1 parze oczu. Jednak kiedy w pobliżu skarbcza znajdzie się nieproszony gość, wówczas smokom wyrasta dokładnie na środku czoła jeszcze jedno oko. Ile par oczu patrzy na każdego, kto chce nieproszony dostać się do skarbcza?

- a) 16                      b) 36                      c) 15                      d) 18                      e) 24

### Zadanie 7.

Jeden z kątów rombu stanowi 0,4 kąta półpełnego, miary pozostałych kątów wynoszą:

- a)  $108^\circ, 72^\circ, 108^\circ$                       b)  $36^\circ, 144^\circ, 144^\circ$                       c)  $72^\circ, 108^\circ, 72^\circ$                       d)  $132^\circ, 48^\circ, 132^\circ$

### Zadanie 8.

Odwrotność liczby  $\left(\frac{1}{7} + 0,5\right) : 9$  to:

- a)  $\frac{1}{14}$                       b)  $-\frac{1}{14}$                       c) 14                      d) -14

**Zadanie 9.**

Ile wody należy dolać do 2 litrów 10% roztworu soli, aby otrzymać roztwór soli 4% ?

- a) 2 litry                      b) 2,5 litra                      c) 3 litry                      d) 4 litry

**Zadanie 10.**

Po usunięciu niewymierności z mianownika ułamka  $\frac{10}{\sqrt{10}}$  otrzymamy liczbę:

- a)  $10\sqrt{10}$                       b)  $\sqrt{10}$                       c)  $5\sqrt{10}$                       d) 10

**Zadanie 11.**

Pole powierzchni trzech ścian sześcianu jest równe  $432 \text{ dm}^2$ . Objętość tego sześcianu wynosi:

- a) mniej niż 1500 litrów      b) 1782 litry                      c) 1728 litrów                      d) ponad 2000 litrów

**Zadanie 12.**

Odsetki od kwoty 500 zł wpłaconych na 24% w stosunku rocznym, po trzech miesiącach wynoszą (podatku nie odliczono):

- a) 50 zł                      b) 40 zł                      c) 30 zł                      d) 20 zł

**Zadanie 13.**

Miara kąta wewnętrznego pięciokąta foremnego jest równa:

- a)  $150^\circ$                       b)  $108^\circ$                       c)  $118^\circ$                       d)  $124^\circ$

**Zadanie 14.**

Wartość wyrażenia  $3 \cdot 2^{10} - 4 \cdot 2^{11} - 5 \cdot 2^{12}$  **nie jest** liczbą podzielną przez:

- a) 2                      b) 3                      c) 4                      d) 5